Centre National de Gestion

CONCOURS OUVERTS LES 28, 29, 30 ET 31 MAI 2018 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – INTERNE ET TROISIÈME CONCOURS

JEUDI 31 MAI 2018

4ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

STATISTIQUES

SUJET : pages 1 à 4

Le barème est donné à titre indicatif.
Le candidat est invité à lire le sujet dans son intégralité.

Notations et quantiles

— $\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$;

— soit X une variable aléatoire : $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ désignent l'espérance et la variance de X ;

— le quantile d'ordre 0.05 d'une loi gaussienne centrée réduite ($\mathcal{N}(0,1)$) est égal à -1.64 ;

— le quantile d'ordre 0.95 d'une loi gaussienne centrée réduite ($\mathcal{N}(0,1)$) est égal à 1.64 ;

— le quantile d'ordre 0.975 d'une loi gaussienne centrée réduite ($\mathcal{N}(0,1)$) est égal à 1.96 ;

— le quantile d'ordre 0.95 d'une loi du χ^2 à 3 degrés de liberté est égal à 7.81.

Exercice 1 Probabilités conditionnelles (1 pt)

L'hôpital d'une petite ville du nord-ouest de l'Argentine compte parmi ses malades 4% qui sont d'origine basque, 58% d'origine espagnole, 32% d'origine indienne et 6% d'origine italienne. Sachant que 3% des indiens ont un sang de rhésus négatif, ainsi que 87% des basques et 22% des populations d'origine italienne et espagnole, quelle est la probabilité pour qu'une éprouvette de sang de rhésus négatif provienne d'un malade d'origine basque ?

Exercice 2 Lois discrètes (1 pt)

Un matériel peut tomber en panne. La probabilité d'une panne est égale à 0.01 à chaque emploi de la machine. La machine doit être utilisée 100 fois. Les pannes surviennent aléatoirement indépendamment les unes des autres.

1 (0.5 pt) Le nombre de pannes obtenues est une variable aléatoire X. Calculer les probabilités des événements : $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$.

2 (0.5 pt) On estime le coût de réparation à 100 euros. La dépense, exprimée en euros, pour les réparations de la machine est une variable aléatoire Y. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Exercice 3 Lois continues (1 pt)

Soit X une variable aléatoire réelle admettant pour densité de probabilité

$$f_X(x) = \left(\frac{10}{x^2}\right) \mathbb{I}_{]10,+\infty[}(x) .$$

Calculer la probabilité que X soit strictement supérieure à 20 notée $\mathbb{P}(X > 20)$ et la fonction de répartition de X notée $F_X(x)$.

Exercice 4 Couple de variables aléatoires (1 pt)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{756}(x^2 + xy)\mathbb{I}_{[0,6]}(x)\mathbb{I}_{[0,6]}(y)\,.$$

Calculer la densité marginale de X notée $f_X(x)$ et la probabilité $\mathbb{P}(X < Y)$.

Exercice 5 Estimation ponctuelle (3 pts)

Soit $X_1, \cdots, X_n$ un n-échantillon de X une variable aléatoire discrète à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$ telle que

$$\mathbb{P}_\theta(X = 0) = \theta, \quad \mathbb{P}_\theta(X = 1) = 0.1, \quad \mathbb{P}_\theta(X = 2) = 0.9 - \theta$$

où $\theta \in]0, 0.9[$ est un paramètre inconnu.

1 (1 pt) Calculer $\mathbb{E}_\theta(X)$ et $\mathbb{V}_\theta(X)$.

2 (1 pt) Déterminer $\tilde{\theta}_n$ l'estimateur de θ par une méthode des moments.

Un autre estimateur de θ très intuitif est donné par

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)\,.$$

3 (1 pt) Comparer $\tilde{\theta}_n$ et $\hat{\theta}_n$ en terme de biais et d'erreur quadratique moyenne.

Exercice 6 Test d'ajustement (3 pts)

Nous cultivons 2 variétés de petits pois : des petits pois jaunes et des petits pois ridés. Nous croisons ces deux variétés entre elles. Les hybrides obtenus ont une apparence normale, ils sont verts et lisses (les gènes qui donnent la couleur jaune et ceux qui donnent l'apparence ridée sont donc tous les deux récessifs). Nous laissons ensuite la population hybride obtenue s'autofertiliser. Cette fois-ci, nous obtenons 4 types de petits pois : normaux (verts et lisses), jaunes et lisses, verts et ridés et ridés et jaunes. Si l'on admet que la transmission de ces deux caractères suit une loi de probabilité résultant de la théorie de Mendel, le nombre de petits pois dans chaque catégorie doit suivre une multinomiale de paramètres $(9/16, 3/16, 3/16, 1/16)$. Les résultats de l'expérience sont : 78 verts et lisses, 26 jaunes et lisses, 19 verts et ridés et 5 jaunes et ridés.

Pour un risque de première espèce asymptotiquement égal à $\alpha = 0.05$, tester la validité de la loi de probabilité résultant de la théorie de Mendel.

Exercice 7 Tests comparaison de moyenne (3 pts)

Les aéroports se doivent de respecter certaines normes concernant les bruits émis par des avions au décollage et à l'atterrissage. Ainsi pour les zones habitées proches d'un aéroport, la limite tolérée se situe à environ 80 décibels. Les habitants d'un des villages proches d'un aéroport assurent que le bruit atteint la valeur limite de 80 décibels en moyenne pour un certain type d'avions. L'aéroport affirme qu'il n'est que de 78 décibels. Des experts sont convoqués pour trancher entre les deux parties en présence. Ils admettent que l'intensité du bruit causé par un avion de ce type suit une loi Gausienne de moyenne μ et de variance 49. Ils enregistrent l'intensité du bruit provoqué par le passage de ces avions sur un échantillon de taille $n = 100$. Ils trouvent que $\bar{x}_{100} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i = 79.1$.

1 (1 pt) Tester $H_0 : \mu = \mu_0 = 80$ contre $H_1 : \mu = \mu_1 = 78$ décibels pour un risque de première espèce égal à $\alpha = 0.05$.

2 (2 pts) Donner l'expression du risque de deuxième espèce, noté β, associé au test précédent et montrer que $\beta > 0.05$. **Commenter**.

Exercice 8 Comparaison de deux proportions (3 pts)

Un laboratoire pharmaceutique a mis au point un nouveau médicament contre la migraine. Pour évaluer l'efficacité de ce traitement, une étude a été réalisée sur 1000 patients : 500 ont reçu le nouveau médicament et 500 le médicament *gold standard* de référence. Après deux mois de tests, les patients ont indiqué s'ils ont ressenti ou pas une amélioration de leur état migraineux, les résultats sont stockés dans la table ci-dessous.

	Amélioration	Pas amélioration
Nouveau médicament	295	205
Médicament de référence	305	195

Le laboratoire veut tester l'hypothèse selon laquelle le nouveau médicament a une efficacité similaire au médicament de référence. Si c'était le cas, il pourrait progressivement se substituer à lui dans la mesure où il génère beaucoup moins d'effets secondaires.

Formaliser le problème posé en terme d'un test statistique sur les paramètres d'un modèle à définir. Pour un risque de première espèce asymptotiquement égal à $\alpha = 0.05$, proposer une stratégie de décision et conclure.

Exercice 9 Régression linéaire simple (4 pts)

Une coopérative agricole souhaite prédire le rendement d'une parcelle d'un hectare de blé en fonction de la quantité d'engrais utilisée. Pour ce faire, nous disposons des 12 données suivantes :

Parcelle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Rendement	3	3	4	4	6	6	7	8	5	7	8	12
Engrais	2.3	2.5	2.6	3.1	3.4	3.7	3.9	4	4.1	4.1	4.2	4.4

Pour tout $i \in \{1, \ldots, 12\}$, notons y_i le rendement de la parcelle d'un hectare pour laquelle la quantité d'engrais x_i a été utilisée. Nous proposons le modèle suivant :

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + E_i$$

où α et β sont des paramètres inconnus et E_i sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées de variance inconnue σ^2. y_i est la réalisation de Y_i.

1 (2 pts) Calculer les estimations par la méthode des moindres carrés des paramètres α et β.

3 (2 pts) Proposer une estimation non biaisée de σ^2 et calculer le coefficient de détermination (R^2).