Centre National de Gestion

CONCOURS OUVERTS LES 28, 29, 30 ET 31 MAI 2018 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – INTERNE ET TROISIÈME CONCOURS

MERCREDI 30 MAI 2018

3ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

MATHEMATIQUES

SUJET : pages 1 à 4

Le barème est donné à titre indicatif.
Le candidat est invité à lire le sujet dans son intégralité.

Exercice 1. *(5 points)*

Soit la matrice réelle de taille 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 6 & 7 & 10 \\ -6 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

et $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
On note $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On souhaite déterminer toutes les matrices carrées réelles M de $M_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation suivante (notée (E)) :

$$M^n = A^n.$$

1. (a) Déterminer le noyau de A. On note w l'unique vecteur du noyau de A ayant 1 pour première coordonnée dans la base canonique $\mathcal{C}$. Que vaut w ?
   (b) Calculer $A.u$ pour $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en déduire une valeur propre de A.
   (c) Montrer que -3 est une valeur propre de A, puis trouver le vecteur propre v associé à -3 ayant 1 pour deuxième coordonnée dans la base canonique.
   (d) Expliquer pourquoi la matrice A est diagonalisable, puis la diagonaliser. On utilisera $P = (u|v|w)$.
   (e) Quelles sont les valeurs propres de A^n ? Est-elle diagonalisable ?
2. On suppose ici que $M \in M_3(\mathbb{R})$ est une solution de l'équation (E).
   (a) Montrer que $M.A^n = A^n.M$.
   (b) En déduire que si b est un vecteur propre pour A associé à une certaine valeur propre λ, $M.b$ appartient à l'espace propre de A^n associé à λ^n.
   (c) Montrer que si (b_1, b_2, b_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour A, alors b_1, b_2, b_3 sont aussi des vecteurs propres pour M.
   (d) Montrer qu'il existe une matrice inversible Q de taille 3 telle que $Q^{-1}AQ$ et $Q^{-1}MQ$ soient diagonales toutes les deux.
3. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E) lorsque n est un nombre impair, puis lorsque il est pair.

Exercice 2. *(3 points)*

Soit la fonction $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2^x - x^2}{x-2}$.

1. On définit la fonction h sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $h(t) = f(t+2)$.
   (a) Montrer que pour $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ on a $h(t) = \frac{4e^{t\ln(2)} - t^2 - 4t - 4}{t}$.
   (b) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $u \mapsto e^u$ au voisinage de 0. En déduire un développement limité de $t \mapsto t.h(t)$ au voisinage de 0.
   (c) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 2.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 2. On note encore f ce prolongement.
3. Montrer que f est dérivable en 2 et calculer $f'(2)$.
4. Étudier la position relative, au voisinage de 2, de la courbe C_f de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.

Exercice 3. *(4 points)*

Soit l'ouvert

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y > 0, y - x > 0\}$$

et le sous-ensemble

$$F = \{(x, y) \in U; x + y \leqslant 4, xy \geqslant 1, y \geqslant 2x\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$.

1. On étudie le domaine F.
   (a) On note $f_1 : x \mapsto 4 - x$, $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$, $f_3 : x \mapsto 2x$. Établir les tableaux de signes de $f_1 - f_2$, $f_1 - f_3$ et $f_2 - f_3$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Esquisser, dans un repère orthonormé, les ensembles U et F et les courbes des fonctions f_1, f_2, f_3.
   (c) Montrer que si $(x, y) \in U$ est tel que $xy \geqslant 1$ alors $x > 0$ et $y > 0$.
2. On étudie φ. Soit $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 - 4v > 0, u > 0\}$.
   (a) Montrer que $\varphi(U) \subset V$.
   (b) Prouver que φ est de classe C^1 sur U et calculer la jacobienne, puis le jacobien.
   (c) Montrer que si $(x, y) \in U$ et $(u, v) = (x + y, xy)$, alors $v = uy - y^2$. En déduire une expression de x et y en fonction de u et v.
   (d) Montrer que φ est une bijection de U sur V et expliciter $\varphi^{-1}(u, v)$.

Exercice 4. *(4 points)*

On cherche à déterminer une solution du problème de Cauchy

$$(E) : \left\{ \begin{array}{l} y' = y^2 + ty \\ y(0) = 1 \end{array} \right. .$$

1. On suppose que y est une fonction solution de (E), définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (on a donc $0 \in I$). On suppose de plus que y ne s'annule pas sur I. Montrer que $z = \frac{1}{y}$ est alors solution de

$$(E_1) : \left\{ \begin{array}{l} z' + tz + 1 = 0 \\ z(0) = 1 \end{array} \right. .$$

2. Soit l'équation différentielle homogène $(E_0) : z' + tz = 0$. On cherche les solutions sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une solution de (E_0).
   (b) Trouver l'ensemble des solutions de (E_0).
3. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $F(t) = \int_0^t e^{\frac{x^2}{2}} dx$.
   Dans la suite de l'exercice on ne cherchera pas à calculer explicitement $F(t)$ en fonction de t.
   (a) Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée.
   (b) Résoudre l'inégalité $\frac{x^2}{2} \geqslant x$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que F admet une limite lorsque t tend vers $+\infty$ et calculer cette limite.
   (c) Montrer que l'équation $F(t) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la note t_0. Quel est le signe de t_0 ?
4. On cherche une solution z_1 de (E_1) sous la forme $z_1(t) = C(t).e^{-\frac{t^2}{2}}$ avec $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.
   (a) Trouver la condition nécessaire et suffisante sur C pour que z_1 soit solution de (E_1).
   (b) Donner une expression de C (à l'aide de la fonction F).
   (c) En déduire une expression de z_1.
5. À l'aide des questions précédentes, exhiber une solution y de (E) définie sur l'intervalle $]-\infty, t_0[$.
6. Existe-t-il un intervalle J de $\mathbb{R}$ et une fonction $\tilde{y}$ définie sur J tels que les conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} J \text{ contient strictement } I =]-\infty, t_0[\\ \tilde{y} \text{ restreinte à } I \text{ est } y \\ \tilde{y} \text{ est solution de } (E) \end{array} \right.$$

soient satisfaites ?

Exercice 5. *(4 points)*

Soit $E = \left\{ \text{ suites réelles } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ ; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n \right\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel S des suites réelles.
2. Soit l'application $f : E \to \mathbb{R}^3, (u_n)_n \mapsto (u_0, u_1, u_2)$.
   (a) Montrer que f est une application linéaire.
   (b) Calculer le noyau de f. L'application f est-elle injective ?
   (c) Prouver que f est bijective. En déduire la dimension de E.
3. On définit les suites $a = (a_n)_n = (\frac{1}{2^n})_n$, $b = (b_n)_n = (\frac{n}{2^n})_n$, $c = (c_n)_n = (\frac{n^2}{2^n})_n$.
   (a) Vérifier que $a, b, c \in E$.
   (b) Montrer que (a, b, c) est une base de E.
4. (a) Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n$, $\sum_{n\geqslant 0} b_n$, $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ sont convergentes.
   (b) En déduire que si $u = (u_n)_n \in E$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.
   On note $s : E \to \mathbb{R}, u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
   (c) Montrer que s est linéaire.